Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x) = x^4 + x^3 - (a^2 - 1)x^2 + 2abx + a^2 - a - 6$ се дели на полинома $g(x) = x^2 - a^2$.

Задача 5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A, където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Задача 6. Една редица от естествени числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ се нарича n-добра, ако $x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \dots, k$. Нека a_n е броят на n-добрите редици за фиксирано естествено число n. Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 02 979 2806 (Петър Бойваленков).

Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 10. клас

Задача 4. Да се реши неравенството

$$\sqrt{1-3x-\sqrt{12-8x}} > \sqrt{-x^2-3x+4}.$$

Задача 5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A, където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Задача 6. Една редица от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се нарича n-добра, ако $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \ldots, k$. Нека a_n е броят на n-добрите редици за фиксирано естествено число n. Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 02 979 2806 (Петър Бойваленков).

Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Колко най-малко подмножества с три елемента на множеството $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ трябва да се изберат така, че всеки два елемента на A да са едновременно елементи на поне едно от избраните множества?

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че за произволни x, y, z, е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)).(f(x) + f(z) - 2f(xz)) \geq 0.$$

Задача 6. Дадено е естествено число a. Да се докаже, че множеството от простите делители на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $x_n = n^{2^{2011}} - a^2$, е безкрайно.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, като $\sphericalangle BAC < 90^\circ$, $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ и точка M е среда на AC. Да се докаже, че $\sphericalangle BMD = 2 \sphericalangle BAD$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $AB.CD = AD.BC$.

Задача 5. Дадени са естествени числа n и k, за които $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-2$. В група от n човека има точно k двойки хора, които се познават. Да се докаже, че от тази група могат да се изберат $n-k+1$ човека, двама от които се познават, като всеки от двамата познати не познава никой от останалите $n-k-1$ от избраните.

Задача 6. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Да се докаже, че за всяка неконстанта функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ съществуват числа x, y и $z > 0$, за които е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)).(f(x) + f(z) - 2f(xz)) < 0.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути.